Fonction de Lambert et étude d'une famille de fonctions

Notions abordées : étude de fonctions et dérivation

Partie I

On considère $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application déterminée par $g(x)=x\mathrm{e}^{x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité égale à 2 cm.

1.a Dresser le tableau des variations de g.

1.b Etudier les branches infinies de g.

2.a Etudier la concavité de g. En quel point la courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une d'inflexion ?

2.b En quel point la tangente au point d'inflexion coupe-t-elle l'axe des abscisses.

2.c Représenter $\mathcal{C}$ accompagnée de la tangente précisée ci-dessus.

3.a Montrer que la restriction de g au départ de $[-1,+\infty[$ réalise une bijection vers un intervalle que l'on précisera. Dresser le tableau de variation complet de son application réciproque notée h.

3.b Sur quel intervalle la fonction h est-elle dérivable ?
Exprimer $h'(x)$ en fonction de x, de $h(x)$ mais sans exponentielles.

3.c Etudier l'existence d'une tangente à h en $-1/\mathrm{e}$.

4. Dans cette question on se propose d'obtenir une valeur numérique approchée de $\alpha=h\left(\frac{1}{2}\right)$.

4.a Justifier que $\alpha\in[0,1/2]$.

4.b On introduit la fonction dérivable $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

Montrer que $\varphi(\alpha)=\alpha$ et $\forall x\geq 0$, $|\varphi'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

4.c On définit une suite récurrente réelle (u_n) par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\varphi(u_n)$.

Etablir que la suite (u_n) converge vers α.

4.d Donner une valeur décimale approchée de α à la précision 10^{-2} en précisant la démarche suivie.

Partie II

Soit λ un paramètre <u>strictement positif</u>.

On étudie ici la famille des fonctions $f_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par $f_\lambda(x)=\mathrm{e}^{-x}+\lambda x^2$.
On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé.

1.a Dresser le tableau des variations de f_λ.
On notera m_λ le point où f admet un minimum et on exprimera m_λ en fonction de h et de λ.
Etablir que $f_\lambda(m_\lambda)=\lambda m_\lambda(m_\lambda+2)$.

1.b Etudier les branches infinies de f_λ et la convexité de cette fonction.

1.c Donner l'allure de $\mathcal{C}_\lambda$.

2. Dans cette question on étudie la fonction $m:\lambda\mapsto m_\lambda$ définie sur $\mathbb{R}^+*$.

2.a Etudier la monotonie de $m:\lambda\mapsto m_\lambda$ ainsi que ses limites quand $\lambda\to+\infty$ et quand $\lambda\to 0^+$.

2.b En observant la relation $2\lambda m_\lambda = e^{-m_\lambda}$, déterminer un équivalent simple de m_λ quand $\lambda \to +\infty$.

2.c En observant la relation $m_\lambda + \ln(m_\lambda) = -\ln(2\lambda)$, déterminer un équivalent simple de m_λ quand $\lambda \to 0^+$.

3. Dans cette question on étudie $\theta : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(\lambda) = f_\lambda(m_\lambda) = \lambda m_\lambda(m_\lambda + 2)$.

3.a Montrer que θ est une fonction croissante.

3.b Déterminer la limite de θ en 0^+ et en $+\infty$.

On prolonge θ par continuité en 0 en posant $\theta(0)$ égal à sa limite en 0^+.

3.c La fonction θ est-elle dérivable en 0 ? Présente-t-elle une tangente en 0 ?

3.d Représenter graphiquement la fonction θ dans un repère orthonormé d'unité égale à 4 cm.
On exploitera les informations obtenues ci-dessus ainsi que la valeur approchée de α pour obtenir un point de la courbe accompagné de sa tangente.

Correction

Partie I

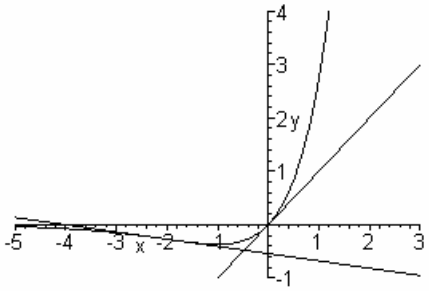
1.a g est $\mathcal{C}^\infty$ et $g'(x) = (x+1)e^x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

1.b Etude en $-\infty$: $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^-$. L'axe (Ox) est asymptote, courbe en dessous.
Etude en $+\infty$: $g(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Branche parabolique verticale.

2.a $g''(x) = (x+2)e^x$ du signe de $x+2$.
g est convexe sur $[-2,+\infty[$ et concave sur $]-\infty,-2]$.
$\mathcal{C}$ présente un point d'inflexion au point d'abscisse -2.

2.b Equation de la tangente en -2 : $y = g'(-2)(x+2) + g(-2)$
i.e. $y = -\frac{1}{e^2}(x+4)$.
Elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -4.



2.c Ci-contre

3.a g est continue et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ vers $\left[g(-1), \lim_{+\infty} g\right[= [-1/e, +\infty[$. En symétrisant le tableau de variation de g :

x	-1		$+\infty$
$h(x)$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

3.b g est dérivable et $g'(x) = (x+1)e^x \neq 0$ sur $]-1,+\infty[$ donc h est dérivable sur $]-1/e,+\infty[$.
Nous verrons, ci-après, que h n'est pas dérivable en $1/e$

$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{1}{(h(x)+1)e^{h(x)}}$ or $h(x)e^{h(x)} = x$ donc $h'(x) = \frac{h(x)}{x(h(x)+1)}$ pour $x \neq 0$ et $h(0) = 1$.

3.c Pour alléger posons $a = 1/e$. On a $h(a) = -1$
Quand $y \to a^+$, $\frac{h(y)-h(a)}{y-a} = \frac{x+1}{g(x)-g(-1)}$ en posant $x = h(y) \to -1^+$.
Or $\frac{g(x)-g(-1)}{x+1} \to 0^+$ car $g'(-1) = 0$ et la stricte croissance de g donne $\frac{g(x)-g(-1)}{x+1} > 0$
donc $\frac{h(y)-h(a)}{y-a} \to +\infty$. La fonction h présente une tangente verticale en a.

4.a $g(0) = 0$ et $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{1/2} \geq \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} \in [g(0), g(1/2)]$ et par suite $h(1/2) \in [0,1/2]$.

4.b $\varphi(\alpha)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha}$ or $\alpha\mathrm{e}^{\alpha}=\frac{1}{2}$ donc $\varphi(\alpha)=\alpha\mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha}=\alpha$.

φ est dérivable par opérations et $\varphi'(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$ donc $|\varphi'(x)|=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\leq\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

4.c La suite (u_n) est bien définie et à valeurs positives car $\forall x\geq 0, \varphi(x)\geq 0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|=|\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)|$ donc par l'IAF : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

Par récurrence, on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}|u_0-\alpha|$ donc $|u_n-\alpha|\to 0$ puis $u_n\to\alpha$.

4.d $|u_0-\alpha|=|\alpha|\leq 1/2$ donc $|u_n-\alpha|\leq 1/2^{n+1}$.

$\frac{1}{2^{n+1}}\leq 5.10^{-3}\Leftrightarrow 2^{n+1}\geq 200\Leftrightarrow n\geq\log_2 100\Leftrightarrow n\geq 7$ .Pour $n=7$, u_7 est une valeur approchée de α à 5.10^{-3} près. A la calculatrice, $u_7=0{,}3519993...$ donc $u_7=0{,}35$ à 5.10^{-3} près. Par suite $\alpha=0{,}35$ à $5.10^{-3}+5.10^{-3}=10^{-2}$ près. Notons que pour $n=6$, $\alpha=u_6$ à 10^{-2} près mais cela ne permet pas de justifier une valeur décimale adéquate compte tenu de l'addition des erreurs d'approximation.

Partie II

1.a f_λ est $\mathcal{C}^\infty$ et $f'_\lambda(x)=-\mathrm{e}^{-x}+2\lambda x=\mathrm{e}^{x}(-1+2\lambda g(x))$ est du signe de $g(x)-\frac{1}{2\lambda}$.

En posant $m_\lambda=h(1/2\lambda)$, on a

x	$-\infty$		m_λ		$+\infty$
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_\lambda(m_\lambda)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f_\lambda(m_\lambda)=\mathrm{e}^{-m_\lambda}+\lambda m_\lambda^2=2\lambda m_\lambda+\lambda m_\lambda^2=\lambda m_\lambda(m_\lambda+2)$ car $m_\lambda\mathrm{e}^{m_\lambda}=1/2\lambda$.

1.b Quand $x\to+\infty$, $\frac{f_\lambda(x)}{x}\to+\infty$. Branche parabolique verticale.

Quand $x\to-\infty$, $\frac{f_\lambda(x)}{x}\to-\infty$. Branche parabolique verticale.

1.c Ci-contre.

2.a $m_\lambda=h(1/2\lambda)$ est décroissante par composition.

Quand $\lambda\to+\infty$, $1/2\lambda\to 0$ or $h(x)\xrightarrow[x\to 0]{}h(0)=0$ donc $m_\lambda\to 0$.

Quand $\lambda\to 0^+$, $1/2\lambda\to+\infty$ or $h(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ donc $m_\lambda\to+\infty$.

2.b $m_\lambda\mathrm{e}^{m_\lambda}=1/2\lambda$ donc $2\lambda m_\lambda=\mathrm{e}^{-m_\lambda}$

Quand $\lambda\to+\infty$, $m_\lambda\to 0$, $2\lambda m_\lambda=\mathrm{e}^{-m_\lambda}\to 1$ puis $m_\lambda\sim\frac{1}{2\lambda}$.

2.c En passant au logarithme népérien $m_\lambda\mathrm{e}^{m_\lambda}=1/2\lambda$, on obtient $\ln m_\lambda+m_\lambda=-\ln(2\lambda)$.

Quand $\lambda\to 0^+$, $m_\lambda\to+\infty$ donc $\ln m_\lambda=o(m_\lambda)$ donc $-\ln 2\lambda=m_\lambda+o(m_\lambda)\sim m_\lambda$.

De plus $\ln 2\lambda=\ln 2+\ln\lambda\sim\ln\lambda$ donc $m_\lambda\sim-\ln\lambda$.

3.a Si $\lambda\leq\mu$ alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_\lambda(x)=\mathrm{e}^{-x}+\lambda x^2\leq\mathrm{e}^{-x}+\mu x^2$ donc $f_\lambda(m_\mu)\leq f_\mu(m_\mu)$.

De plus, m_λ étant minimum de f_λ, on a $f_\lambda(m_\lambda)\leq f_\lambda(m_\mu)$ et donc $\theta(\lambda)\leq\theta(\mu)$.

Ainsi θ est croissante.

3.b Quand $\lambda\to+\infty$, $m_\lambda\sim\frac{1}{2\lambda}$ donc $\theta(\lambda)\sim\lambda\frac{1}{2\lambda}(\frac{1}{2\lambda}+2)\to 1$.

Quand $\lambda\to 0^+$, $m_\lambda\sim-\ln\lambda$ donc $f_\lambda\sim\lambda(\ln\lambda)^2\to 0$.

3.c $\frac{\theta(\lambda)-\theta(0)}{\lambda}=m_\lambda(m_\lambda+2)\to+\infty$.

La fonction θ n'est pas dérivable en 0 mais y présente une tangente verticale.

3.d Quand $\lambda \to +\infty$, $\theta(\lambda) \to 1^-$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote, courbe en dessous.
En $\lambda = 0$, la courbe est en l'origine avec une tangente verticale.
En $\lambda = 2$, $m_\lambda = h(1) = \alpha$. On a $\theta(1) = \alpha(\alpha+2)$. Reste à calculer $\theta'(1)$.

$\theta'(\lambda) = (\lambda(m_\lambda^2 + 2m_\lambda))' = m_\lambda^2 + 2m_\lambda + 2\lambda m_\lambda'(m_\lambda + 1)$ avec $m_\lambda' = (h(1/2\lambda))' = -\frac{1}{2\lambda^2} h'(1/2\lambda)$ donc

$\theta'(1) = \alpha^2 + 2\alpha - (\alpha+1)\frac{2\alpha}{(\alpha+1)} = \alpha^2$.

